U.E CRUZ VITALE
Prof.Zuleidi Zambrano
Matemática 4to A Y B

TEORIA PARA LA ELABORACIÓN DEL CUENTO.

(2 PERSONAS, DEFENSA)

TRIGONOMETRÍA

ETIMOLÓGICAMENTE:

Trigonometría, es la parte de la matemática que estudia las relaciones que existen entre los ángulos internos y los lados de un triángulo, y aplica dichas relaciones al cálculo del valor o medida de alguno de ellos.

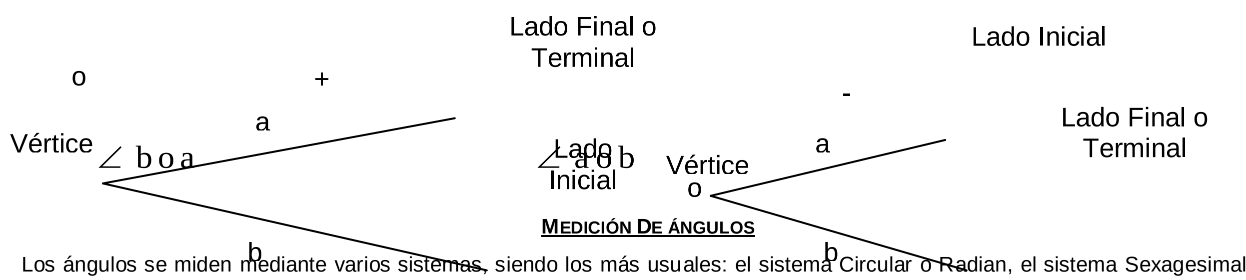
EN LA ACTUALIDAD:

Trigonometría: es la rama de la matemática que estudia las propiedades y las aplicaciones de las funciones trigonométricas.

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO: Es la circunferencia cuyo centro es el origen del sistema de ejes cartesianos o de coordenadas rectangulares y su radio mide la unidad.

ÁNGULOS: Es la región del plano comprendida entre dos semi-rectas que tienen el origen común llamado vértice. Las semi-rectas son lados del ángulo, siendo uno el lado inicial y el otro el lado final o terminal.

EL ÁNGULO GEOMÉTRICO es siempre positivo, mientras que el ángulo trigonométrico puede ser positivo o negativo. Si se considera al ángulo como una rotación de una semi-recta; bien en sentido contrario al giro de las agujas del reloj (positivo) o en el mismo sentido (negativo).



MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Los ángulos se miden mediante varios sistemas, siendo los más usuales: el sistema Circular o Radian, el sistema Sexagesimal y el sistema Centesimal.

EL SISTEMA CIRCULAR O RADIAN: Es la medida del ángulo central correspondiente a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. La unidad es el radian.

El ángulo llano mide π **Radianes**, o sea: 180º

El ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ **Radianes**, es decir: 90º

Por ser **la longitud de la circunferencia 2 π . r**, que contiene 360°, entonces **2 π . r = 360°,** por lo tanto:

1 radian = $\frac{180º}{\pi}$ **= 57,296° = 57° 17' 45" ∴ π = 3,14159**

SISTEMA SEXAGESIMAL: Es el sistema cuyas unidades de medidas van de 60 en 60.

La unidad del sistema sexagesimal en la medida de ángulos, es el grado (° sexagesimal), el cual se define como la medida central del ángulo subtendido por un arco de círculo igual a $^{1}/_{3600}$ ava parte de la circunferencia de un círculo.

Un minuto (') es la $\frac{1}{60}$ ava parte de un grado; un segundo (") es la $\frac{1}{60}$ ava parte de un minuto, o sea $\frac{1}{3600}$ ava parte de un grado.

Sistema Centesimal: La circunferencia también puede ser dividida en **400 partes iguales** llamadas **grados centesimales,** cada grado centesimal posee **100 minutos centesimales** y cada minuto centesimal tiene **100 segundos centesimales.**

2´ x 60"

CONVERSIÓN DEL SISTEMA CENTESIMAL AL SISTEMA SEXAGESIMAL:

Para convertir la medida de un ángulo del sistema decimal al sexagesimal, se multiplican las cifras decimales por sesenta (60') para convertirlos en minutos y si aún existen cifras decimales, se multiplican nuevamente por sesenta (60") para convertirlos en segundos, siendo la parte entera del número dado, los grados y de las partes enteras de ambas multiplicaciones los minutos y segundos de la medida angular.

EJEMPLOS:

A) 29,23°

29, 23° → 29°

0,23
.60
13,80 → 13'

0,8.
60
48,0 → 48"

29, 23° = 29° 13' 48"

B) 62, 4° → 62° 24'

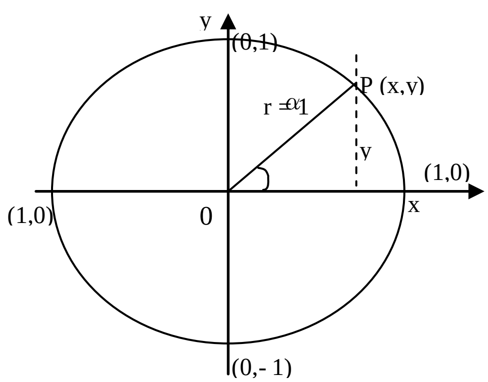
0,4
. 60'
24,0 → 62° 24'

CONVERSIÓN DEL SISTEMA SEXAGESIMAL AL CENTESIMAL:

Para convertir la medida de un ángulo dado en el sistema sexagesimal, se plantea una suma de fracciones en donde los grados son la parte entera, los minutos se dividen entre 60 y los segundos entre 3600; y luego se efectúa la división para llevarlo a centesimal.

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

El círculo trigonométrico, es la circunferencia cuyo radio es la unidad.



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- **Seno**: es la función trigonométrica que aplica al ángulo α la ordenada "y" del punto P, es decir:

Seno (α) = y

Sen α = y

2.- **Coseno**: es la función trigonométrica que aplica al ángulo α la abscisa "x" del punto P, o sea:

Coseno (α) = x

Cos α = x

3.- **Tangente**: es la función trigonométrica que aplica al ángulo α la razón entre la ordenada "y" y la abscisa "x" del punto P.

Tangente (α) = $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\text{Sen}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{Sen } \alpha}{\text{Cos } \alpha}$$

4**.- La Cotangente**: es la función inversa de la tangente, es decir:

$$\text{Cotangente } (\alpha) = \frac{y}{x} \quad ó \quad \frac{1}{\text{tag } \alpha}$$

$$\text{Ctg } \alpha = \frac{y}{x} \text{ ó Ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tag } \alpha}$$

5.- **La Secante**: es la función inversa del coseno, por tanto:

$$\text{Secante } (\alpha) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{Cos } \alpha}$$

$$\text{Sec } \alpha = \frac{1}{x} \text{ ó Sec } \alpha = \frac{1}{\text{Cos } \alpha}$$

6.- **La Cosecante**: es la inversa de la función seno, o sea:

$$\text{Cosecante } (\alpha) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{Sen } \alpha}$$

$$Csc\,\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{Sen } \alpha}$$

El producto de toda función trigonométrica por su inversa, es igual a la unidad.

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS ÁNGULOS: 0° - 90° - 180° - 270° y 360°

Ángulos / Funciones	0°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1	0	-1	0
Coseno	1	0	-1	0	1
Tangente	0	No	0	No	0
Cotangente	No	0	No	0	No
Secante	1	No	-1	No	1
Cosecante	No	1	No	-1	0

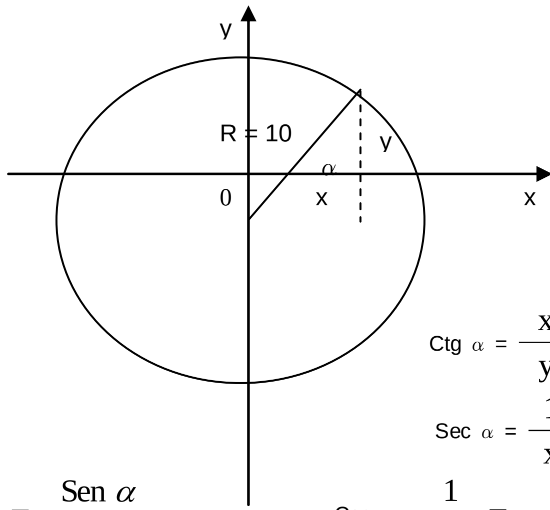
Los valores máximos y mínimos de las funciones: Seno y Coseno es 1 y –1, por lo tanto el Rango de ambos es el intervalo cerrado.

Rgo f_{seno} = [-1 , 1]

Rgo f_{coseno} = [-1 , 1]

La representación gráfica del seno es una curva llamada **Sinousoide** y la del coseno: **Cosinousoide.**

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Por definición:

Sen α = y

Cos α = x

Tg α = $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\text{Sen }\alpha}{\text{Cos }\alpha}$ =

Ctg α = $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\text{Cos }\alpha}{\text{Sen }\alpha}$

Sec α = $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\text{Cos }\alpha}$

Csc α = $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\text{Sen }\alpha}$

IDENTIDADES PITAGÓRICAS:

El triángulo de la figura es rectángulo, y la circunferencia es el círculo trigonométrico (r = 1) y según el Teorema De Pitágoras tenemos:

$y^2 + x^2 = r^2$

De acuerdo con las igualdades anteriores:

a.- $\text{Sen}^2\,\alpha + \text{Cos}^2\,\alpha = 1^2$

$\text{Sen}^2\,\alpha + \text{Cos}^2\,\alpha = 1$ (identidad pitogórica fundamental)

b.- Si la identidad fundamental se divide miembro a miembro entre el $\text{Cos}^2\,\alpha$, tenemos:

$\text{Sen}^2\,\alpha + \text{Cos}^2\,\alpha = 1$

$$\frac{\text{Sen}^2\alpha}{\text{Cos}^2\alpha} + \frac{\text{Cos}^2\alpha}{Cos^2\alpha} = \frac{1}{\text{Cos}^2\alpha}$$

Según las identidades iniciales:

$\text{Tg}^2\,\alpha\ 1 = \text{Sec}^2\,\alpha$

c.- Dividiendo la identidad fundamental entre $\text{Sen}^2\,\alpha$, nos queda:

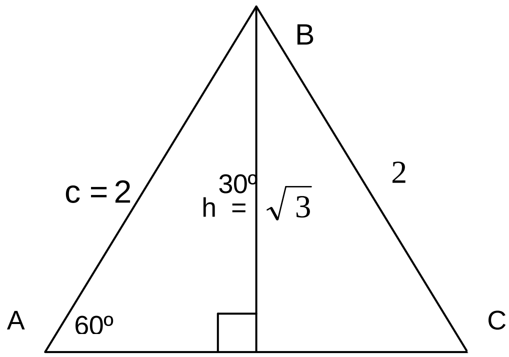
$\text{Sen}^2\,\alpha + \text{Cos}^2\,\alpha = 1$

$$\frac{\text{Sen}^2\alpha}{\text{Sen}^2\alpha} + \frac{\text{Cos}^2\alpha}{Sen^2\alpha} = \frac{1}{\text{Sen}^2\alpha}$$

$1 + \text{Ctg}^2\,\alpha = \text{Csc}^2\,\alpha$

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS ÁNGULOS: 30º - 45º - 60º

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º, usaremos un triángulo equilátero, cuyo lado miden 2 unidades longitud y al cual le trazaremos la altura que calcularemos a través del TEOREMA DE PITÁGORAS



$$b^2 + h^2 = c^2$$

$$h^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow h = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$h^2 = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Para el ángulo de 30º, el cateto apuesto (b) mide una (1) unidad de longitud, el cateto adyacente (h) mide $\sqrt{3}$ unidades de longitud y la hipotenusa (c) mide 2 unidades de longitud.

Los valores de las funciones trigonométricas de 30º se obtendrán al aplicar las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

$$Sen\,30^{\circ} = \frac{\text{Cat. opuesto a } 30^{\circ}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

$$Cos\,30^{\circ} = \frac{\text{Cat. adyacente a } 30^{\circ}}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Tag\,30^{\circ} = \frac{\text{Cat. opuesto a } 30^{\circ}}{Cat.adyacente\ a\ 30^{\circ}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{(Racionalizando)}$$

$$Ctg\,30^{\circ} = \frac{\text{Cat. adyacente a } 30^{\circ}}{Cat.opuesto\text{ a } 30^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$Sec\,30^{\circ} = \frac{\text{hipotenusa}}{Cat.\text{ adyacente}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{3} \quad \text{(racionalizando)}$$

$$Csc\,30^{\circ} = \frac{\text{hipotenusa}}{Cat.\text{ opuesto}} = \frac{2}{1} = 2$$

El triángulo anterior será usado para calcular los valores para 60º, sólo que los catetos cambian, es decir, opuesto será el adyacente y viceversa.

$$Sen\,60^{\circ} = \frac{\text{Cat. opuesto a } 60^{\circ}}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos\,60^{\circ} = \frac{\text{Cat. adyacente a } 60^{\circ}}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$

$$Tag\ 60^{o} = \frac{\text{Cat. opuesto a } 60^{o}}{Cat.adyacente \text{ a } 60^{o}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$Ctg\ 60^{o} = \frac{\text{Cat. adyacente a } 60^{o}}{Cat.opuesto \text{ a } 60^{o}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (racionalizando)}$$

$$Sec\ 60^{o} = \frac{\text{hipotenusa}}{Cat.adyacente \text{ a } 60^{o}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$Csc\ 60^{o} = \frac{\text{hipotenusa}}{Cat.opuesto \text{ a } 60^{o}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{3} \text{ (racionalizando)}$$

Debes observar que los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30º y 60º se intercambian por ser complementarios, es decir la suma de sus medidas es igual a 90º .

Los valores de las razones trigonométricas se obtendrán usando un cuadrado cuyos lados miden unas unidades de longitud y a la cual se le Trazará una diagonal cuya longitud será calculada mediante el **TEOREMA DE PITÁGORAS.**